

Tartu Ülikool
Sotsiaal- ja haridusteaduskond
Haridusteaduste instituut
Klassiõpetaja õppekava

Katrin Metsa

MATEMAATIKAALASED TEADMISED JA NENDE ARENG
I KOOLIASTMES

magistritöö

Juhendaja: Anu Palu, Ph.D

Läbiv pealkiri: Matemaatikaalased teadmised algklassides

KAITSMISELE LUBATUD

Juhendaja: Anu Palu, Ph.D

.....

(allkiri ja kuupäev)

Kaitsmiskomisjoni esimees: Anu Palu, Ph.D

.....

(allkiri ja kuupäev)

Tartu 2013

Resümee

Matemaatikaalased teadmised ja nende areng I kooliastmes

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on uurida longituudselt 1.–3. klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi erinevatel kognitiivsetel tasemetel, teadmiste erinevusi ja muutust esimesest kuni kolmanda klassini korduvülesannete põhjal. Samuti on eesmärgiks uurida sagedamini esinenud väärilahendusi korduvülesannetes. Töö teoreetilises osas antakse ülevaade matemaatikaalastest teadmistest ja nende omandamisest, teadmiste hindamisest ja olulisusest.

Uurimuses kasutati projekti „Areng üleminekul lasteaiast kooli ja esimeses kolmes klassis – vastastikune interaktsioon lapsevanemate, õpetajate ja laste vahel (2008–2011)” raames kogutud andmeid. Antud uurimuses osales 581 õpilast 43 klassist ja 29 koolist üle Eesti. Antud magistritöös kasutati 2008., 2009. ja 2010. aasta kevadel kogutud andmeid. Kasutatud matemaatikatestides olid ülesanded seotud matemaatika sisulise ja kognitiivse valdkonnaga. Vastavalt kognitiivsele valdkonnale olid ülesanded kolmel tasemel: teadmine, rakendamine ja arutlemine.

Tulemuste analüüs näitas, et I kooliastmes lahendavad õpilased kõige paremini ülesandeid, mis nõuavad madalama kognitiivse taseme rakendamist. Kahe aasta jooksul olid õpilaste faktilised- ja protseduurilised teadmised stabiilsed ning kõige suurem muutus toimus rakendamise- ja arutlemisoskuses.

Märksõnad: matemaatikaalased teadmised, teadmiste areng, hindamine

Resume

Primary school pupils' mathematical knowledge and development

The aim of the Master's thesis was to study longitudinally the knowledge of mathematics among pupils of form I, II and III on three cognitive levels, also to study knowledge differences and the knowledge change based on the repeated tasks. The aim also was to find out the most frequent wrong solution of repeated tasks. The theoretical part gives an overview of mathematical knowledge and the acquisition of knowledge, evaluation and importance of knowledge.

The study is based on information collected from the framework of the project called „Development in the Transition from Preschool to School and in Three Grades – Triadic Interaction between Parents, Teachers, and Children (2008–2011)”. The participants of the study were 581 pupils from 43 classes and 29 schools all over Estonia. In this study data was collected in spring of 2008., 2009. and 2010. were used. In the math tests that were used the tasks were related with math content and cognitive area. According to cognitive area the tasks were three levels: knowing, applying and reasoning.

The results showed that in primary school students solve tasks that require applying lower cognitive level. In the two years time students factual and procedural knowledge was stable and the most remarkable change was in the applying and reasoning level.

Keywords: math knowledge, knowledge development, evaluation

Sisukord

Sissejuhatus	5
<i>Matemaatikaalased teadmised ja nende areng</i>	6
<i>Matemaatikaalaste teadmiste hindamine</i>	8
<i>Matemaatikaalaste teadmiste uurimisest Eestis</i>	11
<i>Eesti õpilaste matemaatikaalastest teadmistest rahvusvahelisel taustal</i>	11
<i>Matemaatika tulemused üleriigilistes 3. klassi tasemetöodes</i>	12
<i>Uurimustöö eesmärk ja uurimusküsimused</i>	13
Metoodika.....	14
<i>Valim ja protseduur</i>	14
<i>Mõõtevahendid</i>	14
<i>Andmetöötlus</i>	17
Tulemused	18
<i>Matemaatikaalased teadmised 1.–3. klassis</i>	18
<i>Matemaatikaalased teadmised korduvülesannete soorituste põhjal</i>	21
<i>Enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes</i>	22
Arutelu.....	25
<i>Matemaatikaalased teadmised 1.–3. klassis</i>	25
<i>Matemaatikaalased teadmised korduvülesannete soorituste põhjal</i>	27
<i>Enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes</i>	28
<i>Uurimuse piirangud</i>	29
<i>Kokkuvõtteks</i>	29
Tänu sõnad	29
Autorsuse kinnitus.....	30
Kasutatud kirjandus	31

Sissejuhatus

Algklassides hindavad õpilased matemaatikat meeldivaks õppeaineaks, mis on edaspidises elus kindlasti vajalik ja kasulik. Samas iga aastaga meeldivus selle õppeaine vastu väheneb ning järjest suurem protsent õpilasi leiab, et matemaatika on üheks keeruliseks ja pingutust nõudvaks õppeaineaks koolis (Stodolsky, Salk & Glaessner, 1991). Erinevate rahvusvaheliste uuringute tulemused (Lepmann, 2010; Tire, Puksand, Henno & Lepmann, 2010) ja riigisiseste õpitulemuste hindamine (Üleriigiliste tasemetööde tulemused, 2012) on näidanud, et matemaatika on aine, kus saadakse võrreldes teiste õppeainetega halvemaid tulemusi. Samas selgub uuringute *Program for International Student Assessment* (PISA) 2006, 2009 ja *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) 2003 tulemustest, et ainealaselt on Eesti õpilaste matemaatika keskmised tulemused rahvusvahelistes pingeridades suhteliselt head ning Eesti on heal positsioonil. Õpetajad on suutnud suurele osale õpilastest anda elementaarsed matemaatikaalased teadmised. Uuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006, 2009 tulemused toovad samas välja, et kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt on Eesti õpilastel head faktilised ja protseduurilised teadmised, kuid mida kõrgem on õpilastelt oodatav tunnetuslik tase, seda madalamaks Eesti positsioon riikide pingereas muutub. Ülesanded, mis nõuavad õpilastelt omandatud teadmiste rakendamist ja arutlemist, valmistavad neile rohkem raskusi (Lepmann, 2010; Tire et al., 2010).

Õpilaste edukus matemaatikas võib olla seletatav elementaarsete matemaatikaalaste teadmiste omandamisega juba lasteaias ja algklassides (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Jordan, Kaplan, Ramineni & Locuniak, 2009; Kikas, Peets, Palu & Afanasjev, 2009). Matemaatikaalaste teadmiste omandamine on hierarhiline (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3; Stodolsky et al., 1991), mille puhul alustatakse lihtsamate teadmiste ja oskuste omandamisega ning liigutakse järjest keerulisemate oskuste õppimise poole. Õpetajana on oluline märgata, analüüsida ja hinnata oma klassi õpilaste ainevaldkonnaalaseid teadmisi, oskusi ning muutust aja jooksul, et saada parem ülevaade oma õpilaste tugevustest, nõrkustest ja puudujääkidest. Teades oma klassi õpilaste tugevusi ja nõrkusi, saab õpetaja neid toetada ja aidata ning seeläbi parandada õpilaste matemaatilist arusaamist. Oluline on uurida õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi ja oskusi just kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt, sest see annab õpetajale põhjalikuma tagasiside õpilaste teadmistest ja oskustest, tugevustest ja nõrkustest. Märkamise, analüüsimise ja hindamine aitab planeerida edaspidist õppetööd, et parandada ja täiustada õppeprotsessi.

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on uurida longituudsel 1.–3. klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi erinevatel kognitiivsetel tasemetel, teadmiste erinevusi ja

muutust esimesest kuni kolmanda klassini korduvülesannete põhjal. Samuti on eesmärgiks uurida sagedamini esinenud väärilahendusi korduvülesannetes.

Matemaatikaalased teadmised ja nende areng

Matemaatikaõpetuses on olulisel kohal ainealase pädevuse kujundamine, mis tähendab 1) matemaatiliste mõistete ja seoste tundmist; 2) üldist probleemi lahendamise oskust, mis sisaldab oskust probleeme püstitada, sobivaid lahendusstrateegiaid leida ja neid rakendada; 3) loogilise arutlemise, põhjendamise ja tõestamise oskust (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3). Olulisel kohal on matemaatiliste teadmiste ja oskuste rakendamine erinevates elu- ja tegevusvaldkondades. Järjest enam on töövaldkondi, mis eeldavad matemaatika kasutamisoskust ja matemaatilist arusaamist, mis omakorda nõuavad vastavate ainealaste teadmiste, oskuste olemasolu ning nende rakendamise oskust (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Enamasti eristatakse matemaatika õppimist käsitlevates uurimustes (Byrnes & Wasik, 1991; Eisenhart et al., 1993; Hiebert & Wearne, 1996; Rittle-Johnson & Siegler, 1998) kahte liiki matemaatikaalaseid teadmisi: kontseptuaalseid ja protseduurilisi.

Kontseptuaalsed ehk mõistelised teadmised on teadmised valdkonnas kehtivatest põhiprintsiipidest (Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Schneider & Stern, 2010), mis hõlmavad arusaamist matemaatilistest faktidest ja protseduuridest (Byrnes, 1996; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Mõistelise teadmise olemasolul toimub ülesande lahendamisel õige protseduuri ja strateegia valimine ning selle teostamine (Byrnes & Wasik, 1991; Byrnes, 1996). Neid teadmisi omandatakse läbi avastamise ja tagasiside kaudu, hõlmates sügavamat numbrite ja operatsioonide sisust arusaamist (Dowker, 2005). Mõisteliste teadmiste hindamisel kasutatakse õpilasele mitte-rutiinseid ülesandeid, st ülesandeid, mida õpilased varem pole lahendanud (Byrnes, 1996; Hiebert & Wearne, 1996). Uut tüüpi ülesande lahendamine nõuab õpilaselt olemasolevate teadmiste kasutamist ja seostamist, et luua ülesande lahendamiseks sobiv lahendusstrateegia (Rittle-Johnson et al., 2001).

Protseduurilised teadmised tähendavad, et teatakse vajalikke algoritme ja strateegiaid, mis on olulised konkreetsete eesmärkide saavutamiseks (Byrnes & Wasik, 1991). Näiteks õpilane teab 1) kuidas loendada reas olevaid objekte; 2) kuidas liita, lahutada, korrutada või jagada täisarve ja murdusid (Byrnes, 1996). Protseduurilised teadmised omandatakse läbi kordamise, mehaanilise õppimise ja harjumuste kujundamise, hõlmates endas ilma sügavamate tähendusteta fakte ja oskusi (Dowker, 2005; Mayer, 2002). Õpilased võivad teada vajalikke ja õigeid algoritme, strateegiaid ja neid ülesande lahendamisel õigesti kasutada, kuid

nad ei pruugi õpitud protseduurist aru saada (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Protseduurilisi teadmisi hinnatakse läbi rutiinsete ülesannete, milles lapsed kasutavad probleemide lahendamisel eelnevalt õpitud sammhaavalist lahendusmeetodit (Rittle-Johnson et al., 2001).

Laste omandatavad matemaatikaalased teadmised sõltuvad väga palju keskkonnast, kus nad viibivad. Valdkonnaga seotud teadmised on kontseptuaalsed, kui õpetaja on rohkem keskendunud põhiprintsiipide õpetamisele ning protseduuride õpetamine on teisejärguline (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Kui õpetaja õpetamisviis tähtsustab rohkem algoritmide, strateegiate treenimist ja harjutamist, mis on vajalikud eesmärkide saavutamiseks, siis kipuvad lastel olema enamjaolt protseduurilised teadmised (Hiebert & Wearne, 1996; Rittle-Johnson et al., 2001). Erinevad uurimused (Eisenhart et al., 1993; Hiebert & Wearne, 1996; Stodolsky et al., 1991) toovad välja, et algklassides keskendutakse õpetamisel rohkem protseduurilisele arusaamisele ning toimub lahendusalgoritmide treenimine ja harjutamine. Hiebert & Wearne (1996) tõid oma uurimuses välja, et õpilasel on raske mõista ja saada aru ülesande lahenduskäigust, kui enamasti toimub lahendusalgoritmide pähe õppimine. Õpilane on edukalt võimeline lahendama ülesande, teostades vastavaid protseduure, kuid ta ei pruugi aru saada teostatavast lahenduskäigust. Samuti leiti, et mõisteline arusaamine toetab protseduuriliste oskuste omandamist ja kasutamist.

Kontseptuaalsed ja protseduurilised teadmised on omavahel väga tihedalt seotud (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Suurenemine ühes teadmiste valdkonnas, viib suurenemisele teises ning see reegel kehtib ka vastupidises suunas (Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Õpetamise juures on oluline mõista, et arendades õpilaste protseduurilisi teadmisi, tekib neil parem arusaam konspektuaalsetest teadmistest ning samuti kehtib see vastupidi (Rittle-Johnson et al., 2001).

Matemaatikaalased teadmised võivad areneda õpilastel aja jooksul erinevalt (Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012; Kikas et al., 2009) ning samuti olla seotud nende eelteadmistega (Duncan et al., 2007; Jordan et al., 2009). Palu (2010) uurimusest ilmnes, et osad klassi õpilastest võivad võrreldes oma klassikaaslastega matemaatikaalaseid teadmisi omandada hilinemisega. Lihtsamate toimingute omandamine võtab nendel õpilastel rohkem aega, aga samas jõuavad nad vanemates klassides teadmiste arengus teistele õpilastele järele või omandavad vastavad teadmised üks kuni kaks aasta hiljem (Geary et al., 2012).

Õpilaste esialgsed ainealased teadmised võivad ennustada edaspidiseid paremaid õpitulemusi. Erinevad uurimused (Aunola et al., 2004; Duncan et al., 2007; Jordan, Glutting & Ramineni, 2010) on leidnud, et õpilased, kellel on kooliteed alustades head matemaatikaalased eelteadmised on algklassides edukamad ning nende ainealased teadmised

arenevad kiiremini. Samas kui õpilased, kelle matemaatikaalased teadmised võrreldes klassikaaslastega on madalamal tasemel, näitavad edaspidistes teadmistes aeglasemat arengut (Aunola et al., 2004).

Afanasjev ja Palu (2005) ning Palu, Afanasjev ja Vojevodova (2007) seavad õpilaste edukuse prognoosimise matemaatikas rahvusvahelise uuringu *International Project on Mathematical Attainment* (IPMA) testide põhjal kahtluse alla. Uuringu tulemustest ilmnes, et enne kooli omandatud teadmised on positiivselt seotud hilisemate õpitulemustega. Selgus, et õpilased, kellel olid suuremad eelteadmised, olid I kooliastme lõpus ka teistest edukamad. Samas näitas uurimus seda, et nõrkade eelteadmistega õpilased võivad jõuda edukamatele esimese õppeaasta jooksul järele ning edukamad võivad langeda tugevast rühmast madalamasse. Esimesel õppeaastal on õpilaste matemaatikaalased teadmised ja oskused kõige rohkem muutuvad, millest oleneb edaspidine edukus matemaatikas.

Matemaatikaalaste teadmiste hindamine

Matemaatika mõistmine on arusaamine faktide, strateegiate, ideede ja teiste valdkonnaspetsiifiliste aspektide omavahelistest suhetest (Hiebert & Wearne, 1996), mis eeldab tähelepanu pööramist nii kontseptuaalsetele kui ka protseduurilistele teadmistele (Eisenhart et al., 1993). Põhikooli riiklik õppekava (2011, lisa 3) toob välja, et matemaatika kaudu õpib laps tundma matemaatilisi mõisteid ja nendevahelisi seoseid. Olulisel kohal on üldise probleemi lahendamise oskuse kujundamine, mis sisaldab oskust probleeme püstitada, valida sobivaid lahendusstrateegiaid ja neid rakendada. Matemaatika õpetamise juures on oluline arusaamine, mille õpetamine on küllaltki keeruline protsess, vajades matemaatilisi ja pedagoogilisi teadmisi ning oskusi (Eisenhart et al., 1993).

Õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi hinnatakse õppele seatud eesmärkidega, mille hindamise aluseks, tunnetusliku tegevuse järgi, võib võtta Bloomi õppe-eesmärkide taksonoomia (Byrnes, 1996; Krathwohl, 2002). Toetudes Bloomi taksonoomiale, jaotatakse tunnetustegevused kuueks põhikategooriaks: teadmine, mõistmine, rakendamine, analüüs, süntees ja hindamine (Krathwohl, 2002). Taksonoomia on ülesehitatud hierarhiliselt, mille puhul madalama astme teadmised on eelduseks järgmiste tekkeks (Byrnes, 1996). Rakendamine, analüüsimine, sünteesimine ja hindamine ei ole võimalik enne, kui õpilane teab ja mõistab õpitavat (Byrnes, 1996). Hindamine pole jällegi võimalik enne, kui osatakse teadmisi rakendada, analüüsida ja sünteesida (Byrnes, 1996). Samuti on Bloomi taksonoomia kategooriad järjestatud lihtsamast keerukamate teadmiste poole ning konkreetsest abstraktsemani (Krathwohl, 2002).

Teadmise tasemel eeldatakse info meeldejätmist ning hiljem selle kasutamist (Anderson & Sosniak, 1994), mis omakorda on seotud mehhaanilise kordamisega (Byrnes, 1996). Saavutamaks teadmiste taset, korratakse õpitud teemat teatud aja tagant, et teadmised ei ununeks. Uute teemade käsitlemisel toimub informatsiooni meeldejätkmine ning lisamine eelnevalt meeldejäetud informatsioonile (Mayer, 2002). Õpilasel võivad olla head teemakohased teadmised, mis saavutati läbi harjutamise ja kordamise, kuid ta ei pruugi antud teemat mõista. Ning ilma teema mõistmiseta on raske oma teadmisi probleemide lahendamisel kasutada (Mayer, 2002). Mõistmine hõlmab sügavamat, kuid mitte täielikku arusaamist õpitavast (Byrnes, 1996), mis tähendab omakorda uue teadmise ja eelneva teadmise omavahel seostamist (Mayer, 2002). Mõistmise tase sisaldab endas tõlgendamist, iseloomustamist, klassifitseerimist, kokkuvõtete tegemist, järeldamist, võrdlemist ja seletamist (Mayer, 2002). Teadmiste rakendamise taseme puhul toimub õpitud teadmiste meenutamine ning kasutamine, loomaks sobivaid üldistusi ja printsiipe (Anderson & Sosniak, 1994). Analüüs tähtsustab materjali jagamist erinevateks osadeks ning arusaamist osade vahelistest seostest (Anderson & Sosniak, 1994). Süntees tähendab samas elementide ja osade kokku panemist ehk tervikust arusaamist (Anderson & Sosniak, 1994). See hõlmab endas varasema kogemuse ja uue materjali seostamist, muutes õpitava tähenduse uueks. Kõige kõrgemaks kategooriaks Bloomi taksonoomias on hindamine, mille puhul antakse mingile ideele, tööle või meetodile väärtus (Anderson & Sosniak, 1994).

Põhikooli riiklikus õppekavas on eraldi välja toodud õpitulemused, mille kaudu hinnatakse õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3). Hindamise käigus on võimalik saada ülevaade õpilaste teadmistest ja puudujääkidest, ning tänu millele saavad õpetajad neid toetada ja aidata. Hindamine peab innustama õpilast järjekindlalt õppima, suunama tema enesehinnangu kujunemist ning toetama teda edasise haridustee valikul. Õpilase jälgimine on kestev protsess, mille käigus õpetajad koguvad süstemaatiliselt andmeid õpilase kohta, et hinnata nende arengut (Zevenbergen, Dole & Wright, 2004).

Põhikooli riiklikus õppekavas (2011, lisa 3) esitatud õpitulemused, mis on matemaatikaalaste teadmiste hindamise aluseks, on kahedimensioonilised. Eristatakse sisulist valdkonda, mis hõlmab konkreetset temaatikat, ning kognitiivset ehk tunnetuslikku valdkonda. Kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt peab õpilane õpitulemuse saavutamiseks valdama toiminguid, mida tuntakse ka pädevuste nime all. Riiklikus õppekavas on toodud välja, et õpilase teadmisi tuleb hinnata kolmel kognitiivsel tasemel: 1) faktide, protseduuride ja mõistete teadmine, 2) teadmiste rakendamine ja 3) arutlemine. Õppekavas toodud

tunnetuslikud tasemed järgivad hierarhilist ülesehitust ning sisaldavad kõiki õppe-eemärkide taksonoomias toodud teadmiste tasemeid.

Sarnaselt põhikooli riikliku õppekavaga (2011, lisa 3) hinnatakse rahvusvahelises uuringus TIMSS (2009) õpitulemusi nii sisulisest ning kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt (Mullis et al, 2009). Tunnetusliku dimensiooni järgi on TIMSS uuringus hindamise aluseks kolm valdkonda: 1) teadmine, 2) rakendamine ja 3) arutlemine. Teadmise valdkond hõlmab informatsiooni meenutamist, teadmist matemaatilistest seostest, samuti teadmisi matemaatilisest sõnavarast, mõistetest ja sümbolitest (Mullis et al., 2009). Teadmiste rakendamine eeldab matemaatiliste algoritmide sooritamise reeglite mäletamist ja oskust neid rakendada rutiinsete ülesannete lahendamisel (Mullis et al., 2009). Rutiinsed ülesanded on õpilastele tuttavad ülesanded, mille lahendamine toetub varem õpitud protseduuridele. Neid ülesandeid kasutatakse teemade kordamisel, et õpitu paremini mälus kinnistuks (Mullis et al., 2009; Orton, 2004). Arutlemine tähendab oskust analüüsida, püstitada oletusi, kavandada, teha kokkuvõtteid, üldistada, hinnata ja põhjendada. Arutlemisoskust läheb vaja keerulisemate ülesannete lahendamisel (Mullis et al., 2009), mida võib käsitleda kui mitte-rutiinseid ehk probleemülesandeid (Byrnes, 1996). Mitte-rutiinsete ülesannete lahendamine pakub õppijale alati midagi uut, millega varem pole kokku puutunud (Orton, 2004). Rahvusvahelise uuringu TIMSS tunnetuslik valdkond sarnaneb Bloomi õppe-eesmärkide taksonoomiale, mis võimaldab hinnata õpilaste ainealaseid teadmisi ja oskusi.

Rahvusvahelises haridusuuringus PISA mõõdetakse õpilase matemaatilisi teadmisi ja oskusi saavutustasemete järgi, mis eeldab matemaatika pädevuste rakendamisoskust (Tire et al., 2010). PISA eristab ülesannete lahendamisel kolme tunnetustegevuse taset: reprodutseerimist, seostamist ja reflekteerimist (Tire et al., 2010). Reproduktsiooni tase on kõige madalam tase, mis hõlmab faktide ja rutiinsete protseduuride taasesitamist (Tire et al., 2010). Sellel tasemel olev õpilane tunneb ära ja leiab üles ülesandes esitatavat informatsiooni ning oskab kasutada elementaarseid protseduure, valemeid või reegleid (Tire et al., 2010). Seostamise tase eeldab erinevate matemaatiliste ideede ja faktide seoste kasutamist lihtsamate probleemide lahendamisel (Tire et al., 2010). Kõrgeim tunnetustegevuse tase, refleksioon, tähendab avaramat ja loomingulisemat matemaatilist mõtlemist koos argumenteerimisega (Tire et al., 2010). Läbi tunnetustegevuse tasemete hindab PISA uuring õpilaste edukust kasutada matemaatikaalaseid teadmisi igapäevaelus.

Matemaatikaalaste teadmiste uurimisest Eestis

Eestis on õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi kognitiivse valdkonna järgi uuritud peamiselt antud ajahetkes (Palu & Kerikmäe, 2012; Tammiksaare, 2010), mitte longituudselts. Antud uurimused (Palu & Kerikmäe, 2012; Tammiksaare, 2010) on näidanud, et Eesti koolide õpilastel on head fakti- ja protseduurilised teadmised, kuid raskusi valmistab teadmiste rakendamine ning arutlemine. Arutlemisoskus hõlmab õppe-eesmärkide taksonoomias kõrgemaid tunnetuslikke tasemeid, mis eeldab põhjendamise, analüüsimise, sünteesimise, üldistamise, tulemuste hindamise ja mitte-rutiinsete ülesannete lahendamise oskust (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3). Arutlemisoskus ei teki iseenesest, vaid vajab arendamist juba algklassides (Palu, 2010).

Igal järgneval õppeaastal täienevad ainevaldkonna teemad millegi uuemaga ning nõuavad õpilastelt samuti uut tüüpi probleemide lahendamist. Samuti muutub matemaatiliste probleemide lahendamine keerulisemaks, nõudes õpilastelt kõrgemaid tunnetuslikke pädevusi (Jordan et al., 2010). Palu ja Kerikmäe (2012) toovad välja, et seitsmenda klassi õpilased kordavad samu vigu, mis on tüüpilisemad esimesele kooliastmele. Sellest lähtuvalt on vajalik teises kooliastmes eelneva kooliastme teemade harjutamine ja süvendamine, sest need ei ole kinnistunud.

Eesti õpilaste matemaatikaalastest teadmistest rahvusvahelisel taustal

Eesti õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi on hinnatud ka rahvusvahelistes uuringutes TIMSS 2003, PISA 2006, 2009 ja IPMA, mis on andnud hea ülevaate õpilaste edukusest matemaatikas. Läbiviidud uuringud kirjeldavad ning annavad põhjalikku tagasisidet õpilaste ainealaste teadmiste ja oskuste, tugevuste ja nõrkuste kohta, mis omakorda aitavad parandada õppetöö kvaliteeti.

Eesti osales IMPA uuringus aastatel 2002–2005, mille käigus hinnati Eesti õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi sisulisest valdkonnast lähtuvalt ning erinevatel kognitiivsetel tasemetel esimeses kolmes klassis (Palu et al., 2007). Uuringust selgus, et üldiselt sooritati test õpilaste poolt hästi. Samuti ilmnes, et Eesti õpilastele ei valmista raskusi fakti- ja protseduurilisi teadmisi eeldavad ülesanded, vaid ülesanded, mille lahendamiseks on vaja mõistete rakendamist ja arutlemist.

TIMSS uuringust võttis Eesti osa 2003. aastal, milles uuriti 8. klasside õpilasi. Testi ülesanded lähtusid nii sisu kui ka kognitiivsest valdkonnast (Lepmann, 2010). Kognitiivne valdkond eeldas õpilastelt faktide ja protseduuride teadmist, mõistete rakendamist ning arutlemist. Uuringu tulemustest selgus, et Eesti õpilased tulevad väga hästi toime madalamaid

tunnetuslikke pädevusi nõudvate ülesannetega. Eestis oli ainult 3% õpilasi, kes ei jõudnud madalaimale miinimumtasemele, rahvusvaheline keskmine oli aga 25%. Samas ilmnes, et mida kõrgemat tunnetuslikku taset ülesande lahendamine nõudis, seda rohkem õpilasi jäi ülesande lahendamisel hätta (Lepmann, 2010).

PISA on uuring, mis keskendub 15-aastaste õpilaste teadmistele ja oskustele funktsionaalses lugemises, matemaatilises ja loodusteaduslikus kirjaoskuses (Tire et al., 2010). Matemaatiline kirjaoskus on seotud eluliste situatsioonidega, milles õpilane on võimeline matemaatiliste vahenditega lahendatavaid probleeme nägema, püstitama, lahendama, analüüsima, samuti on olulisel kohal tulemuste tõlgendamine ning oskus saadud tulemusi jagada oma kaaslasega (Lepmann, 2010; Tire et al., 2010). PISA testide ülesanded eeldavad õpilastelt matemaatika pädevuste rakendamist ning hõlmavad kolme tunnetustegevuse taset.

PISA 2009 uuringust selgub, et Eesti õpilased lahendavad ülesannetest kõige paremini faktilisi ja rutiinseid protseduure nõudvaid ülesandeid, sest need ülesanded ei nõua õpilastelt kõrget tunnetuslikku pädevust (Tire et al., 2010). Ülesanded, mis nõuavad loovat ja kõrgemat matemaatilist mõtlemist, tekitavad õpilastes rohkem raskusi ning nende lahendatus on halvem. Vaatamata sellele, selgus PISA 2009 uuringust, et suur hulk Eesti koolide õpilasi valdab ülesannete lahendamisel madalamaid tunnetuslikke tasemeid ja seetõttu on koht üldises pingereas päris hea. Nimelt, Eestis on minimaalse baastaseme saavutanud väga suur hulk õpilasi (87,9%), kuid mida kõrgem on õpilastelt oodatav tunnetuslik pädevus, seda väiksem on õpilaste osakaal (Tire et al., 2010). 2006. ja 2009. aasta PISA uuringu matemaatikatulemuste võrdluses on Eesti tulemused liikunud madalamate tasemete suunas (Lepmann, 2010; Tire et al., 2010).

Matemaatika tulemused üleriigilistes 3. klassi tasemetöodes

Üleriigilise matemaatika tasemetöö eesmärgiks on kontrollida kooliastme lõpus vajalike õpitulemuste omandatust (Tasemetööde ning põhikooli..., 2010). Kolmanda klassi lõpus läbiviidava tasemetöö ülesanded eeldavad, et õpilane tuleks toime õpitud teadmiste meenutamisega ja rakendamisega uutes olukordades, samuti teadmiste seostamisega teistes õppeainetes omandatud teadmiste ja oskustega ning uue teabe leidmisel (3. klassi matemaatika..., s.a.). Tasemetööde ning põhikooli ja gümnaasiumi lõpueksamite ettevalmistamise ja läbiviimise ning eksamitööde koostamise, hindamise ja säilitamise tingimused ja kord ning tasemetööde, ühtsete põhikooli lõpueksamite ja riigieksamite tulemuste analüüsimise tingimused ja kord (2013) toob välja, et tasemetöö ülesanded peavad

lähtuma riiklikus õppekavas kirja pandud õppe- ja kasvatusesmärkidest, pädevustest ning ainekavas määratud kooliastme nõutavatest õpitulemustest. Kolmanda klassi tasemetöö ülesannete koostamisel lähtutakse sisulisest- ja kognitiivsest valdkonnast (3. klassi matemaatika..., s.a.).

Kolmanda klassi tasemetöö (3. klassi matemaatika..., s.a) analüüs näitas, et alates 2007. aastast kuni 2009. aastani tasemetöö lahendatuse keskmine tulemus langes ning ebaõnnestujate arv kasvas. Alates 2010. aastast jäi tasemetöö lahendatuse keskmine tulemus püsima ning 2011. aastal keskmine tulemus paranes 5% võrra. Samuti vähenes ebaõnnestujate arv ja kasvas edukate õpilaste arv. 2011. aasta 3. klassi üleriigilise matemaatika tasemetöö lühikokkuvõttest selgus, et sisuvaldkonnast lähtuvalt lahendati kõige paremini arvude järjestamise ülesannet ja võrdlusülesannet, mis nõudis mõistete „pikem” ja „lühem” võrdlemist. Kõige halvemini lahendati arvutamisyülesannet ning kella tundmist nõudvat ülesannet. Üleriigilise matemaatika tasemetöö ülesannete koostamisel lähtutakse kognitiivsest valdkonnast (3. klassi matemaatika..., s.a.), kuid senised matemaatika tasemetöö lühianalüüsid ei anna tagasisidet õpilaste teadmistest erinevatel kognitiivsetel tasemetel. Selleks, et teada saada, millised on õpilaste tugevad ja nõrgad küljed ning millised raskused esinevad erinevate kognitiivsete tasemete rakendamisel, tuleks põhjalikumalt analüüsida ja hinnata õpilaste kognitiivseid oskusi (Lepmann, 2010; Palu, 2010; Tire et al., 2010).

Uurimustöö eesmärk ja uurimusküsimused

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on uurida longituudselt 1.–3. klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi erinevatel kognitiivsetel tasemetel, teadmiste erinevusi ja muutust esimesest kuni kolmanda klassini korduvülesannete põhjal. Samuti on eesmärgiks uurida sagedamini esinenud väärilahendusi korduvülesannetes.

Eesmärgi saavutamiseks püstitati järgmised uurimusküsimused:

1. Millised on I kooliastme õpilaste matemaatikaalased teadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel ja nende erinevus kahe aasta jooksul?
2. Milline on kahe aasta jooksul matemaatikaalaste teadmiste areng kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt korduvülesannete soorituste põhjal?
3. Millised on enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes erinevatel ajahetkedel?

Metoodika

Valim ja protseduur

Antud uurimuse aluseks on pikemaajalise projekti „Areng üleminekul lasteaiast kooli ja esimeses kolmes klassis – vastastikune interaktsioon lapsevanemate, õpetajate ja laste vahel (2008–2011)” raames kogutud andmed.

I kooliastme õpilasi testiti kolme aasta jooksul neli korda. Õpilased sooritasid matemaatikatesti 2007. aasta sügisel (1. klass), 2008. aasta kevadel (1. klass), 2009. aasta kevadel (2. klass) ja 2010. aasta kevadel (3. klass). Antud uurimuses kasutati 2008., 2009. ja 2010. aasta kevadel kogutud andmeid, mille põhjal koostati antud uurimuse valim.

Valimi moodustamiseks kasutati lihtjuhuvalimi meetodit, st igal sihtgruppi kuuluval õpilasel oli võrdne võimalus osaleda läbiviidavas testis. Lõppvalimi koostamiseks struktureeriti ümber projekti käigus loodud andmebaasi andmed. Antud töö autor selekteeris välja algvalimist need koolid, klassid ja õpilased, kes osalesid ja sooritasid kahe õppeaasta jooksul kõik kolm matemaatikateadmiste testi (T1, T2, T3). Käesoleva uurimistöö valimisse kuulus 581 õpilast 43 klassist ja 29 koolist üle Eesti.

Õpilaste testimine toimus kirjalikult matemaatika tundide ajal. Aega testi lahendamiseks oli 45 minutit. Teste viisid läbi klassiõpetajad, kes teste ei hinnanud. Testi ülesannete vastused kodeeriti uurijate poolt dihhotoomselt: vale vastus või vastamata ülesanne (0) ja õige vastus (1).

Mõõtevahendid

Kasutatavateks mõõtevahenditeks olid Anu Palu koostatud matemaatikatestid. Ülesannete koostamisel arvestati matemaatika sisulise ja kognitiivse valdkonnaga. Ülesannete sisu valikul lähtuti Põhikooli riiklikus õppekavas esitatud matemaatika õpitulemustest (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3). Kolmel aastal läbiviidud matemaatikatestid sisaldasid kolme suuremat sisulist valdkonda: arvutamine, mõõtmine ja tekstülesanded ning geomeetrilised kujundid. Iga valdkond koosnes alateemadest, mis olid kooskõlas vastava klassi õpitulemustega. Ülesanded olid samuti koostatud nii, et need hõlmaksid kognitiivsetest tasemetest teadmist, rakendamist ja arutelu.

Esimese klassi matemaatikatest (T1), mis viidi läbi kevadel, koosnes seitsmest ülesandest, mis omakorda jagunesid 23 alaülesandeks. T1 testis oli faktilisi- ja protseduurilisi teadmisi hindavaid ülesandeid kolm, rakendamisülesandeid oli kaks ning arutlemise taset nõudis samuti kaks ülesannet.

Teadmiste esimene ülesanne jagunes kümneks alaülesandeks, kus tuli 20 piires liita ja lahutada kahekohalisele/-st arvule/-st või ühekohalisele/-st arvule ühekohaline arv. Ülesanne kuulus arvutamise valdkonda. Teine teadmiste ülesanne hindas õpilaste orienteerumist ruumis ja kujundite tundmist. Ülesanne jagunes neljaks alaülesandeks, kus õpilased pidid tundma ruutu, ringi, kolmnurka ja ristkülikut ning määrama nende asendit. Kolmas teadmiste ülesanne kuulus arvutamise valdkonda, kus õpilaste ülesandeks oli 20 piires arvude järjestamine. Rakendamisülesanneteks olid ühetehtelised tekstülesanded, kus õpilased pidid kahekohalisest arvust lahutama ühekohalise arvu. Arvutamine toimus 20 piires. Arutelu ülesannetest üks nõudis sobiva arvu valimist, et võrratus oleks tõene. Teises arutelu ülesandes oli neli ristkülikut, mis lõigati mööda jooni tükkideks. Õpilase ülesandeks oli saadud tükid loendada. Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis näitas, et test on usaldusväärne ($\alpha = 0,78$).

Teise klassi matemaatikatestis (T2) oli üheksa ülesannet, mis omakorda jagunesid 18 alaülesandeks. Faktilist- ja protseduurilist taset hindavaid ülesandeid oli testis kaks, rakendamisoskust nõudvaid ülesandeid oli neli ja arutlemise taset nõudis kolm ülesannet. Esimene faktilist- ja protseduurilist taset hindav ülesanne jagunes neljaks alaülesandeks, kus tuli 100 piires liita või lahutada kahekohalisele/-st arvule/-st ühekohaline arv. Teine teadmiste ülesanne kuulus geomeetriliste kujundite valdkonda, kus õpilane pidi antud kujundite hulgast ära tundma kolmnurgad, nelinurgad ja viisnurgad. Rakendamisülesanneteks olid kolm tekstülesannet, millest kaks olid ühetehtelised ja kolmas oli kahetehteline ülesanne. Rakendamisülesande alla kuulus ka ülesanne, kus oli vaja moodustada ette antud numbritest võimalikult väike arv. Arutlemist nõudvaid ülesandeid oli testis kolm. Esimese ülesande puhul oli vaja arusaamist arvu koostisest. Teine arutelu ülesanne jagunes kolmeks alaülesandeks, kus tuli teha liitmis ja lahutamistehteid massi- ja ajaühikutega ning kolmandas arutelu ülesandes pidi õpilane leidma arutluse ja graafiku abil ühe tüdruku pikkuse. Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis näitas, et teises klassis läbiviidud test on usaldusväärne ($\alpha = 0,76$).

Kolmanda klassi matemaatikatest (T3) koosnes kolmeteistkümnest ülesandest, mis jagunesid 36 alaülesandeks. T3 oli osaliselt kordustest, st T3 ülesanded võis jaotada korduvülesanneteks ja uuteks ülesanneteks. Testis oli kuus korduvülesannet, st ülesanded, mida õpilased olid juba eelnevatel aastatel lahendanud. Korduvülesanded hõlmasid kognitiivsetest tasemetest teadmist, rakendamist ja arutelu. Üks ülesanne 1. klassi ja viis ülesannet 2. klassi testist kordusid 3. klassi testis. Lisaks kuuele korduvülesandele oli testis seitse uut ülesannet, mida õpilased ei olnud varem lahendanud.

Teadmiste esimeses ülesandes pidid õpilased järjestama viis neljakohalist arvu alates kõige väiksemast. Teine teadmiste ülesanne jagunes kaheteistkümneks alaülesandeks, kus tuli 100 piires liita, lahutada, korrutada ja jagada kahe- ja ühekohalisi arve. Korduv teadmiste ülesanne, mis oli teise aasta testis, nõudis õpilastelt geomeetriliste kujundite tundmist. Enamik testis olevatest tekstülesannetest olid rakendamisülesanded, millest kaks olid korduvülesanded. Üks rakendamisülesanne oli juba varasemalt esindatus esimese ja teine teise klassi testis. Kolmas ülesanne nõudis arusaamist arvu koostisest, kus õpilane pidi leidma kirjeldusele vastava arvu. Neljas ülesanne, mis nõudis rakendamise taset, jagunes neljaks alaülesandeks. Õpilane pidi arvutama nelja avaldise vastused, arvestades seejuures tehete järjekorra reeglitega. Kolmanda klassi testis oli kuus ülesannet, mis nõudsid arutlemisoskust. Esimene arutelu ülesanne jagunes kaheksalaülesandeks, kus tuli kolme antud arvu abil kirjutada kaks erinevat võrdust. Teine arutelu ülesanne nõudis arutlemist ja analüüsi õigete tehete kohta. Kolmas arutelu ülesanne oli tekstülesanne, kus olid esitatud ajaühikud ning õpilane pidi arutluse käigus leidma õige vastuse. Korduvaid arutelu ülesandeid, mida õpilased olid eelnevatel aastatel lahendanud, oli kolm. Korduvülesannetest olid esindatud esimese klassi testi tekstülesanne ja kaks teise klassi ülesannet. Üks ülesanne nõudis arusaamist arvu koostisest, teine ajaühikute liitmist ja lahutamist ning kolmas ülesanne oli seotud tüdruku pikkuse leidmisega. Testi reliaabluse leidmiseks arvutati Cronbach'i alfa, mis näitas, et test on usaldusväärne ($\alpha = 0,82$).

Uurimustöös vaadeldi matemaatikaalaste teadmiste arengut kuue korduvülesande soorituse põhjal. Uurimustöös tähistati korduvülesanded 1, 2, 3, 4, 5, 6. Korduvülesanne 1 kontrollis õpilaste fakti- ja protseduurilisi teadmisi, korduvülesanded 2 ja 3 teadmiste rakendamisoskust ning korduvülesanded 4, 5 ja 6 arutlemisoskust. Ülesannete tekstid ja õiged lahenduskäigud koos vastustega olid järgmised:

Korduvülesanne 1: *Leia nimetatud kujundid. Kirjuta vastavad tähed. Õigeks vastuseks loeti: 1) Kolmnurgad: C, E, I; 2) Nelinurgad: A, D, F, G; 3) Viisnurgad: B, H.*

Õpilasele oli esitatud üheksa erinevat kujundit ning ta pidi nende kujundite hulgast leidma ülesse kolmnurgad, nelinurgad ja viisnurgad. Igale kujundile oli peale kirjutatud tähestikust üks täht, mille ta pidi õige kujundi nimetuse juurde kirjutama.

Korduvülesanne 2:

1. klass: *Kümme last ostsid kokku 18 õhupalli. Kuus õhupalli neist olid punased ja ülejäänud sinised. Mitu sinist õhupalli lapsed ostsid?*

3. klass: 10 last ostsid kokku 18 õhupalli. Kuus õhupalli neist olid punased ja ülejäänud sinised. Mitu sinist õhupalli lapsed ostsid? Õigeks lahenduskäiguks koos vastusega loeti $18 - 6 = 12$.

Korduvülesanne 3: Kaustik maksab 8 krooni. Kaustik on 2 korda kallim kui vihik. Kui palju maksab vihik? Õigeks lahenduskäiguks koos vastusega loeti $8 : 2 = 4$.

Korduvülesanne 4: Kasutades nelja numbrit 0, 1, 6 ja 7 kõiki ainult üks kord, kirjuta võimalikult väike arv. Õigeks vastuseks loeti 1067.

Korduvülesanne 5:

2. klass: Joonisel näed nelja tüdruku pikkusi. Tüdrukute nimed on jooniselt kaduma läinud. On teada, et Liis on kõige pikem. Ann on kõige lühem. Kai on pikem kui Sandra. Kui pikk on Sandra?

Jooniseks oli neljast tulbast koosnev vertikaalne tulpdiagramm, kus x-teljele olid tulpadena kantud ilma nimedeta tüdrukute pikkused ning y-teljelt pidid õpilased tüdrukute pikkused välja lugema.

3. klass: Nelja tüdruku pikkused on 75 cm, 100 cm, 125 cm ja 150 cm. On teada, et Liis on kõige pikem. Ann on kõige lühem. Kai on pikem kui Sandra. Kui pikk on Sandra?

Antud korduvülesandes pidid õpilased ilma joonise abita leidma vastuse. Õigeks vastuseks loeti 100cm.

Korduvülesanne 6: Arvuta 1) $70 \text{ min} - 60 \text{ s} = \dots\dots\text{min}$. Õigeks vastuseks loeti 69 minutit.
2) $1 \text{ h } 50 \text{ min} + 50 \text{ min} = \dots\dots$ Õigeks vastuseks loeti 2 tundi ja 40 minutit või 160 minutit.

Andmetöötlus

Andmete töötlemisel kasutati tabelitöötlusprogrammi MS Excel, kuhu sisestati töö autori poolt 3. klassi matemaatikatesti andmed ning millest selekteeris töö autor välja magistritöö uurimusküsimuste osas olulised andmed. Seejärel viidi kolme aasta matemaatikatesti andmed üle andmetöötlusprogrammi SPSSi, kus rakendati neile kirjeldavat ja järeldavat andmeanalüüsi. Antud uurimistöös töödeldi kogutud õpilaste andmeid kvantitatiivsete andmeanalüüsimeetoditega. Statistiliselt oluliseks loeti tulemused usaldusnivool $p < 0,05$. Andmeanalüüsimeetoditest kasutati kirjeldava statistika näitajaid (aritmeetiline keskmine, standardhälve), t-testi ning dispersioonanalüüsi.

Tulemused

Matemaatikaalased teadmised 1.–3. klassis

Käesoleva töö esimene uurimusküsimus oli, millised on I kooliastme õpilaste matemaatikaalased teadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel ja nende erinevus kahe aasta jooksul. Selleks leiti kolmel aastal läbi viidud testide üldised keskmised. T1 keskmine lahendus oli 0,82 (SD = 0,153), T2 keskmine 0,74 (SD = 0,178) ja T3 keskmine 0,75 (SD = 0,149). Testide keskmiste tulemuste võrdlemiseks tehti dispersioonanalüüs ANOVA, mis näitas, et klasside testide keskmised tulemused on oluliselt erinevad nii 1. klassis ($F(42,538) = 3,989$, $p < 0,001$), 2. klassis ($F(42,538) = 3,581$, $p < 0,001$) ja 3. klassis ($F(42,538) = 1,571$, $p = 0,014$).

Et selgitada välja erinevused erinevate kognitiivsete tasemete vahel 1., 2. ja 3. klassis, tehti kirjeldavad analüüsid ning paariti võrdluse t-testid. Tabelis 1 on esitatud matemaatika teadmiste erinevate kognitiivsete tasemete miinimumid, maksimumid, aritmeetilised keskmised ja standardhälbed 1., 2. ja 3. klassis.

Tabel 1. *Matemaatika tulemused erinevatel kognitiivsetel tasemetel 1., 2. ja 3. klassis.*

	Min	Max	M	SD
Faktid ja protseduurid 1. kl	0,13	1	0,85	0,144
Faktid ja protseduurid 2. kl	0	1	0,86	0,185
Faktid ja protseduurid 3. kl	0,06	1	0,86	0,148
Rakendamine 1. kl	0	1	0,71	0,405
Rakendamine 2. kl	0	1	0,66	0,274
Rakendamine 3. kl	0	1	0,71	0,222
Arutlemine 1. kl	0	1	0,77	0,289
Arutlemine 2. kl	0	1	0,67	0,258
Arutlemine 3. kl	0	1	0,55	0,226

Märkus. Min - miinimum; Max - maksimum; M - aritmeetiline keskmine; SD - standardhälve; kl - klass.

Matemaatika teadmiste tulemustest erinevatel kognitiivsetel tasemetel on näha, et 1. klassis on õpilastel head fakti- ja protseduurilised teadmised, võrreldes rakendamis- ja arutlusoskusega. Samuti on näha, et arutlemisoskus on rakendamisoskusest parem. Järgnevalt kontrolliti, kas erinevate kognitiivsete tasemete vahel ilmnenud erinevused 1. klassis on ka statistiliselt olulised. Selleks tehti paariti võrdluse t-testid (Paired-Samples T-Test) fakti- ja protseduuriliste teadmiste ning rakendamisoskuse vahel, rakendamisoskuse ning arutlemisoskuse vahel ja samuti fakti- ja protseduuriliste teadmiste ning arutlemisoskuse vahel. Analüüs kinnitab, et 1. klassis on õpilastel faktilised- ja protseduurilised teadmised

oluliselt paremad, võrreldes rakendamisoskusega ($p < 0,001$) ja arutlemisoskusega ($p < 0,001$) (Tabel 2). Samuti selgus, et kognitiivsetest tasemetest on arutlemisoskus õpilastel parem, kui rakendamine ($p < 0,001$).

Tabel 2. *Kognitiivsete tasemete võrdlus paariti 1. klassis.*

Kognitiivsete tasemete paarid	M (vahe)	t	df	p
Fakti- ja protseduurilised teadmised - rakendamine	0,14	8,997	580	0,000
Rakendamine - arutlemine	-0,05	-2,83	580	0,005
Fakti- ja protseduurilised teadmised - arutlemine	0,09	7,615	580	0,000

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Seejärel kontrolliti, kas erinevate kognitiivsete tasemete vahel ilmnenud erinevused 2. klassis on statistiliselt olulised. Selleks viidi läbi paariti võrdluse t-test, millest selgus, et 2. klassis on õpilastel faktilised- ja protseduurilised teadmised oluliselt paremad, võrreldes rakendamisega ($p < 0,001$) ja arutlemisega ($p < 0,001$) (Tabel 3). Samuti selgus, et rakendamise ja arutlemise vahel ei ole statistiliselt olulist erinevust ($p = 0,125$).

Tabel 3. *Kognitiivsete tasemete võrdlus paariti 2. klassis.*

Kognitiivsete tasemete paarid	M (vahe)	t	df	p
Fakti- ja protseduurilised teadmised - rakendamine	0,20	16,865	580	0,000
Rakendamine - arutlemine	-0,02	-1,535	580	0,125
Fakti- ja protseduurilised teadmised - arutlemine	0,184	16,702	580	0,000

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Viimasena kontrolliti, kas erinevate kognitiivsete tasemete vahel ilmnenud erinevused 3. klassis on statistiliselt olulised. Läbiviidud paariti võrdluse t-test näitas, et 3. klassis on õpilastel kõige paremad faktilised- ja protseduurilised teadmised, võrreldes rakendamisega ($p < 0,001$) ja arutlemisega ($p < 0,001$) (Tabel 4). Samuti selgus, et teadmiste rakendamine on õpilastel parem, võrreldes arutlemisega ($p < 0,001$).

Tabel 4. *Kognitiivsete tasemete võrdlus paariti 3. klassis.*

Kognitiivsete tasemete paarid	M (vahe)	t	df	p
Fakti- ja protseduurilised teadmised - rakendamine	0,15	19,965	580	0,000

Rakendamine - arutlemine	0,16	16,842	580	0,000
Fakti- ja protseduurilised teadmised - arutlemine	0,32	35,347	580	0,000

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Järgmisena uuriti erinevusi sama liiki kognitiivsete tasemete vahel 1., 2. ja 3. klassi võrdluses. Selleks viidi läbi paariti võrdluse t-testid fakti- ja protseduuriliste teadmiste vahel, rakendamisoskuste vahel ning arutlusoskuste vahel kõigil kolmel õppeaastal. Analüüs kinnitab, et õpilaste faktilistes- ja protseduurilistes teadmistes ei ole 1. kuni 3. klassini statistiliselt olulist erinevust (Tabel 5).

Tabel 5. Fakti- ja protseduuriliste teadmiste võrdlus paariti erinevatel ajahetkedel.

Kognitiivse taseme paarid	M (vahe)	t	df	p
Fakti- ja protseduurilised teadmised 1. kl–2. kl	0,01	-0,607	580	0,544
Fakti- ja protseduurilised teadmised 2. kl–3. kl	-0,00	-0,418	580	0,676
Fakti- ja protseduurilised teadmised 1. kl–3. kl	-0,01	-1,377	580	0,169

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Seejärel uuriti kas rakendamisoskuste vahel on statistiliselt oluline erinevus. T-testi analüüsist selgus, et 2. klassis on rakendamisoskus oluliselt halvem, võrreldes 1. klassiga ($p = 0,002$) ja 3. klassiga ($p < 0,001$) (Tabel 6). Samuti selgus, et 1. klassi ja 3. klassi rakendamisoskuses ei ole statistiliselt olulist erinevust ($p = 0,814$).

Tabel 6. Rakendamisoskuse võrdlus paariti erinevatel ajahetkedel.

Kognitiivse taseme paarid	M (vahe)	t	df	p
Rakendamine 1. kl–2. kl	0,05	3,167	580	0,002
Rakendamine 2. kl–3. kl	-0,05	-4,521	580	0,000
Rakendamine 1. kl–3. kl	0,00	0,236	580	0,814

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Viimasena kontrolliti, kas arutlemisoskuste vahel on statistiliselt oluline erinevus. Analüüsist ilmnes, et arutlemisoskuse puhul on 1. kuni 3. klassini statistiliselt oluline erinevus olemas (Tabel 7). Samuti selgus, et 1. klassis on arutlemistase statistiliselt oluliselt parem,

võrreldes 2. klassiga ($p < 0,001$) ja 3. klassiga ($p < 0,001$) ning 2. klassis on arutlemine statistiliselt oluliselt kõrgem kui 3. klassis ($p < 0,001$).

Tabel 7. Arutlemisoskuse võrdlus paariti erinevatel ajahetkedel.

Kognitiivse taseme paarid	M (vahe)	t	df	p
Arutlemine 1. kl–2. kl	0,09	6,424	580	0,000
Arutlemine 2. kl–3. kl	0,13	12,112	580	0,000
Arutlemine 1. kl–3. kl	0,22	16,210	580	0,000

Märkused. M (vahe) - kognitiivsete tasemete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Matemaatikaalased teadmised korduvülesannete soorituste põhjal

Teine uurimusküsimus oli, milline on kahe aasta jooksul matemaatikaalaste teadmiste areng kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt korduvülesannete soorituste põhjal. T3 oli osaliselt kordustest, milles oli esindatud üks esimese aasta testi ülesanne ning viis teise aasta testi ülesannet.

Korduvülesannete lahendamise keskmistest tulemustest on näha (Tabel 8), et korduval lahendamisel on viie ülesande tulemused paranenud ning ühe ülesande tulemus on muutunud madalamaks.

Tabel 8. Korduvülesannete lahendamise tulemused.

		Min	Max	M	SD
Korduvülesanne 1	2. klass	0	1	0,76	0,359
	3. klass	0	1	0,78	0,365
Korduvülesanne 2	1. klass	0	1	0,69	0,464
	3.klass	0	1	0,79	0,410
Korduvülesanne 3	2. klass	0	1	0,44	0,497
	3. klass	0	1	0,59	0,492
Korduvülesanne 4	2. klass	0	1	0,45	0,498
	3. klass	0	1	0,60	0,490
Korduvülesanne 5	2. klass	0	1	0,86	0,352
	3. klass	0	1	0,85	0,359
Korduvülesanne 6	2. klass	0	1	0,42	0,406
	3. klass	0	1	0,56	0,392

Märkus. Min - miinimum; Max - maksimum; M - aritmeetiline keskmine; SD - standardhälve.

Järgnevalt kontrolliti, kas samade korduvülesannete lahendamise keskmised tulemused erineval ajal on ka statistiliselt oluliselt erinevad. Selleks viidi läbi t-test korduvülesande esimesel lahendatusel saadud keskmise tulemuse ning korduvlahendamise keskmise tulemuse

vahel. Analüüsist selgus, et nelja korduvülesande lahendatuse keskmiste tulemuste vahel on statistiliselt oluline erinevus (Tabel 9). Korduvülesanded 2, 3, 4 ning 6 olid teisel lahendamisel paremini lahendatud. Samuti ilmnas, et korduvülesannete 1 ja 5 lahendus ei paranenud ega halvenenud oluliselt.

Tabel 9. Korduvülesannete lahendatuse tulemuste võrdlus paariti.

		M (vahe)	t	df	p
Korduvülesanne 1	2. klass / 3. klass	-0,02	-1,04	580	0,300
Korduvülesanne 2	1. klass / 3. klass	-0,10	-4,25	580	0,000
Korduvülesanne 3	2. klass / 3. klass	-0,15	-5,74	580	0,000
Korduvülesanne 4	2. klass / 3. klass	-0,15	-5,62	580	0,000
Korduvülesanne 5	2. klass / 3. klass	0,01	0,39	580	0,701
Korduvülesanne 6	2. klass / 3. klass	-0,14	-7,46	580	0,000

Märkused. M (vahe) - korduvülesannete keskmiste tulemuste vahe; t - testistatistiku väärtus; df - vabadusastmetearv; p - olulisusenivoo.

Statistiliselt kõige suurem erinevus oli korduvülesande 3 lahendatuse keskmistes tulemustes ning kõige väiksem erinevus oli korduvülesande 2 lahendatuse keskmistes tulemustes. Kognitiivse valdkonna järgi kuulusid korduvülesanded 2 ja 3 mõlemad rakendamise valdkonda. Statistiliselt oluline muutus lahendatuse keskmistes tulemustes oli veel korduvülesandes 4 ja 6, mis nõudsid õpilaselt arutlusoskust. Samuti nõudis arutlusoskust korduvülesanne 5, mille lahendatuse keskmine oluliselt ei muutunud. Statistiliselt jäi lahendatuse keskmine samaks veel korduvülesande 1 puhul, mis eeldas õpilastelt fakti- ja protseduurilisi teadmisi.

Enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes

Kolmas uurimusküsimus oli, millised on enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes erinevatel ajahetkedel. Võrreldakse nelja korduvülesande väärilahendusi, mille lahendatuse keskmiste tulemuste vahel oli statistiliselt oluline erinevus.

Korduvülesanne 2 oli teadmiste rakendamist eeldav tekstülesanne, milles tuli 18 ostetud õhupallist lahutada 6 punast õhupalli, et leida, mitu sinist õhupalli osteti. Õigeks vastuseks loeti 12 sinist õhupalli. Esimesel testimisel oli antud tekstülesande enamlevinud väärilahenduseks tekstis olnud arvude liitmine: $18 + 6 = 24$ (Tabel 10). Selline väärilahendus esines esimesel testimisel, korduvtestimisel ei esinenud seda väärilahendust ühelgi õpilasel. 2,4% õpilastest andis esimesel testimisel lahenduseks $18 - 6 = 13$, kuid korduvtestimisel esines antud väärilahendust vähem kui 2% õpilastest. Korduvtestimisel lisandus juurde

väärlahendus, milles õpilased ajasid omavahel segamini lahutamise- ja jagamistehte ning millest tingituna said nad ülesandele ka vale vastuse. Väärlahendust $18 - 10 = 8$ esines samuti korduvtestimisel rohkem, kui esimesel testimisel.

Tabel 10. Korduvülesande 2 enamlevinud väärlahendused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv % 1. klass	Õpilaste arv % 3. klass
24	$18 + 6 = 24$ Sooritati liitmistehe	7,7	0,0
13	$18 - 6 = 13$ Lahutamisel tekkis arvutamiseviga	2,4	< 2,0
3	$18 : 6 = 3$ Lahutamine ja jagamine aeti omavahel segamini	0,0	4,3
8	$18 - 10 = 8$ Kasutati tekstis olevaid mitteseotud arve ning teosti lahutamistehte	< 2,0	2,8
Valesid vastuseid kokku	Kirjutati vale vastus	31,3	21,3

Märkused. < 2,0 - viga esines vähem kui 2%.

Korduvülesanne 3 oli teadmiste rakendamist eeldav ülesanne, milles tuli jagamise teel leida vihiku hind. Õigeks lahenduskäiguks loeti $8 : 2 = 4$. Esimesel testimisel ja kordustestimisel oli antud tekstülesande enamlevinud väärlahenduseks märgitud $8 \cdot 2 = 16$ (Tabel 11). Antud väärlahendust sooritas korduvtestimisel 8% õpilastest rohkem, võrreldes esimese testimisega. Kui 2. klassis andis 15,8% õpilastest väärlahenduseks $8 - 2 = 6$, siis 3. klassis vähenes selle vale lahenduskäigu andnud õpilaste hulk 12,5% võrra. Positiivne muut oli väärlahenduses, milles õpilane liitis omavahel tekstülesandes olevad arvud. Esimesel testimisel oli vale lahenduse $8 + 2 = 10$ sooritanute arv tunduvalt suurem, kui korduvtestimisel.

Tabel 11. Korduvülesande 3 enamlevinud väärlahendused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv % 2. klass	Õpilaste arv % 3. klass
16	$8 \cdot 2 = 16$ Seose korda rohkem omistamine valele esemele	20,8	28,8
6	$8 - 2 = 6$	15,8	3,3

Seose <i>korda rohkem</i> valesti mõistmine			
8 + 2 = 10			
10	Seose <i>korda rohkem</i> valesti mõistmine	10,2	< 2,0
Valesid vastuseid kokku	Kirjutati vale vastus	68,0	40,8

Märkused. < 2,0 - viga esines vähem kui 2%.

Korduvülesanne 4 oli arutelüülesanne, milles tuli kirjutada võimalikult väike arv, mis koosneks neljast antud numbrist. Õigeks vastuseks loeti 1067. Esimesel testimisel oli kõige enamlevinud valedeks vastusteks märgitud 1670, 0167 ja 0 (Tabel 12). Korduvtestimisel esitati antud valesid vastuseid õpilaste poolt vähem või ei esitatud üldse. Enamlevinud valeks vastuseks anti korduvtestimisel 167, mille esitas 7,7% õpilastest võrreldes esimese testimisega rohkem.

Tabel 12. Korduvülesande 4 enamlevinud väärilahendused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv % 2. klass	Õpilaste arv % 3. klass
1670	Viga raske kirjeldada	5,5	4,5
0167	Ei teata, et naturaalarvu esimene number ei saa olla null	5,5	0,0
0	Neljast numbrist valiti kõige väiksem	10,2	2,2
167	Arv 0 jäeti kirjutama, saadi kolmekohaline arv	5,0	12,7
Valesid vastuseid kokku	Kirjutati vale vastus	54,6	39,9

Korduvülesanne 6 oli arutlusoskust nõudev ülesanne, mis jagunes kaheks korduvaks alaülesandeks. Nendest lahendati kõige halvemini ülesannet 1h 50 min + 50 min. Õigeks vastuseks loeti 2 h ja 40 min või 160 min. Esimesel testimisel enamlevinud valesid vastuseid 100 min ja 100, esitati korduvtestimisel õpilaste poolt vähem (Tabel 13).

Tabel 13. Korduvülesande 6 alaülesande enamlevinud väärilahendused.

Vastus	Vea kirjeldus	Õpilaste arv % 2. klass	Õpilaste arv % 3. klass
--------	---------------	----------------------------	----------------------------

2 h	Ajaühikud teisendati kümnendsüsteemis	22,5	31,2
100 min	Jäeti märkimata 1h ning ei teisendatud 100 min	4,8	< 4,0
100	Liideti kokku minutid	4,0	0,0
Vastus puudub	Ülesannet ei lahendatud	8,1	4,5
Valesid vastuseid kokku	Kirjutati vale vastus	61,8	51,6

Märkused. < 4,0 - viga esines vähem kui 4%.

Arutelu

Käesoleva magistritöö eesmärgiks oli uurida longituudsel 1.–3. klassi õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi erinevatel kognitiivsetel tasemetel, teadmiste erinevusi ja muutust esimesest kuni kolmanda klassini korduvülesannete põhjal. Samuti oli eesmärgiks uurida sagedamini esinenud väärilahendusi korduvülesannetes.

Matemaatikaalased teadmised 1.–3. klassis

Uurimuse esimese küsimusena vaadeldi, millised on I kooliastme õpilaste matemaatikaalased teadmised erinevatel kognitiivsetel tasemetel ja nende erinevus kahe aasta jooksul. Üldiselt sooritati kolmel aastal testid hästi, kuid samas selgus, et matemaatikaalased teadmised on klassiti väga erinevad. Võib oletada, et selline erinevus võib olla tulenenud õpetaja õpetamisviisist (Hiebert & Wearne, 1996; Rittle-Johnson et al., 2001), õpetajate tööstaažist ning olla seotud õpilaste individuaalsete võimete arenguga (Kikas et al., 2009). Seega edaspidi võiks uurida seoseid õpetamisviisi ja õpilaste õpitulemuste vahel klassiti.

Hinnang matemaatikateadmistest võib olla seotud ülesannetega, mida õpilased peavad lahendama (Hiebert & Wearne, 1993; Chamberlin, 2010). Antud uurimuses kasutatud matemaatikatestide ülesannete koostamisel arvestati kognitiivse valdkonnaga, mis võimaldas hinnata õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi erinevatel tasemetel. Kognitiivsetest tasemetest hinnati õpilaste fakti- ja protseduurilisi teadmisi, teadmiste rakendamist ning arutlemisoskust. Antud uurimusest selgus, et I kooliastme õpilastel on head fakti- ja protseduurilised teadmised, kuid nii hästi ei osata veel matemaatilisi teadmisi rakendada ja nende üle arutleda. Sarnastele tulemustele jõudsid enda töös ka Palu (2010) ja Svjatskaja (2011), kes uurisid algklassiõpilaste matemaatikaalaseid teadmisi ja nende arengut. Samuti on teada PISA 2009 uuringu tulemustest, et Eestis on kolmanda kooliastme õpilastel head fakti- ja protseduurilised

teadmised, kuid puudu jääb kõrgemast mõistelisest arusaamisest (Tire et al., 2010). Antud uuringust selgus, et fakti- ja protseduuriliste teadmiste tase oli kahe aasta jooksul ühtlasem, kui rakendamise- ja arutlemisoskuse tase (vt Tabel 1). Seda võib tingida asjaolu, et õpetajad keskenduvad rohkem mõistete formaalsele õpetamisele ning lahendusalgoritmide harjutamisele ja treenimisele. Vähem pööratakse tähelepanu õpitust arusaamisele (Palu, 2010). Oluline oleks aga suurendada õpilaste mõistelist arusaamist, sest arvatakse, et see toetab ka protseduuriliste oskuste omandamist, kasutamist ning seostamist uute teadmistega (Hiebert & Wearne, 1996).

Uurimusest selgus, et kõige enam muutus kahe aasta jooksul rakendamise- ja arutlemisoskuse tase. Kõige madalam keskmine tulemus oli teise klassi õpilaste rakendamisoskusel ning kolmanda klassi arutlemisoskusel. Teisel aastal toimus rakendamisoskuse langus, kuid see tõusis taas kolmandal aastal (vt Tabel 1). See võib olla seletatav uut tüüpi rakendamisülesannetega teise klassi matemaatikatestis, mis nõudsid õpilastelt tähelepanelikumat teksti lugemisoskust, seoste ja suhete leidmist ning sügavamat tekstist arusaamist. Usutavasti igal aastal ülesannete raskusaste muutub ning ülesanded vajavad järjest enam rakendamise- ja arutlusoskust. Õpilastel võivad olla head fakti- ja protseduurilised teadmised, aga kui nad ei oska neid omavahel seostada ja rakendada, siis võivad tekkida õpilastel raskused kõrgemaid kognitiivseid tasemeid nõudvate ülesanne lahendamisel (Hiebert & Wearne, 1996).

Rakendamisoskuse paranemine kolmandal aastal võib olla seletatav lugemisoskuse arenguga. On leitud, et ülesannete lahendamisoskust võib mõjutada lugemisoskus (Geary, 1994; Palu & Kikas, 2010), mis võis olla kolmandal aastal õpilastel parem. Samas ilmnes Palu ja Kikase (2010) uurimusest, et ka hea lugemisoskusega õpilastel võivad olla raskused matemaatilise teksti mõistmisel. Samuti võib oletada, et õpetaja muutis oma rõhuasetust õpetuses ja hakkas rohkem tegelema teksti mõistmisega ning pöörama enam tähelepanu tekstülesannete lahendamisele. Lahendades erinevaid kognitiivseid tasemeid nõudvaid ülesandeid, on väga oluline probleemi mõistmine ja sellest arusaamine, mis on üheks oluliseks komponendiks matemaatikapädevuse kujunemisel (Põhikooli riiklik õppekava, 2011, lisa 3). Rakendamisoskuse paranemine võib olla seletatav ka sellega, et kolmanda aasta testi ei lisandunud uut tüüpi rakenduskust nõudvaid ülesandeid. Lapsed lahendavad paremini tuttavaid tüüpülesandeid, kuna nad peaksid neid lahendama automaatselt (Kikas, 2010).

Uurimusest selgus, et arutlemisoskuse keskmised tulemused langesid kahe aasta jooksul ilmselgelt. Tegelikult on nooremas koolieas üldse raske eristada rakendamise- ja arutlusoskust

nõudvaid ülesandeid, kuna laste isiklikud kogemused on ülesannete lahendamisel erinevad. Tihti on raske eristada lapsele tuttavaid ja uusi ülesandeid (Cooper & Dunne, 2000), st rutiinseid rakendamisülesandeid ja mitterutiinseid aruteluülesandeid. Sellest lähtuvalt võiks algklassides rakendamis- ja arutlusoskust nõudvaid ülesandeid käsitleda koos kui probleemülesandeid.

Antud uurimuse tulemuste põhjal võib öelda, et algklassides tuleks suuremat tähelepanu pöörata rakendamis- ja arutlusoskuse kujundamisele, mis on vajalikud probleemülesannete lahendamisel ja mõistmisel. Õpetajana on oluline teadvustada, et mõisteline arusaamine ei teki õpilastel iseenesest, vaid vajab arendamist juba algklassides. Samas ei saa eeldada, et esimese kooliastme lõpuks õpilane oskab õpitud mõisteid omavahel seostada ja süstematiseerida ning uutes olukordades rakendada (Palu & Kerikmäe, 2012), mis on omakorda olulised oskused probleemülesannete lahendamisel. Oluline on esimeses kooliastmes tegeleda erinevatel kognitiivsetel tasemetel olevate ülesannete lahendamisega, sest see aitab kaasa matemaatilise mõistmise tekkele (Eisenhart et al, 1993). Pöörates juba algklassides rohkem tähelepanu kõrgemate kognitiivsete oskuste arendamisele, siis võib loota, et paranevad ka vanemate kooliastmete õpilaste tulemused kõrgematel saavutustasemetel.

Matemaatikaalased teadmised korduvülesannete soorituste põhjal

Teise uurimusküsimusena uuriti, milline on kahe aasta jooksul matemaatikaalaste teadmiste areng kognitiivsest valdkonnast lähtuvalt korduvülesannete soorituste põhjal. Selgus, et õpilased lahendasid üldiselt hästi ülesannet, mis eeldas neilt mõistete teadmist ning klassifitseerimist. Lähtudes TIMMS uuringu kognitiivsete tasemete kirjeldusest ja Bloomi õppe-eesmärkide taksonoomia tasemetest, saab öelda, et antud ülesanne nõudis õpilastelt madalamaid kognitiivseid teadmisi ja oskusi. Võib oletada, et just selle tõttu lahendati seda ülesannet erinevatel ajahetkedel küllaltki hästi. Samas selgus, et korduvlahendus ei paranenud ega halvenenud oluliselt, vaid jäi samale tasemele. Selline tulemus võib viidata asjaolule, et algklassides pööravad õpetajad rohkem tähelepanu teadmiste mehaanilisele kordamisele, millega saavutatakse mõistete teadmise tase, kuid mitte sisuline arusaamine.

Matemaatikaõpetuses on oluline silmas pidada, et enne ei ole võimalik liikuda keerulisemate ülesannete juurde kui õpilased on saavutanud mõistmise taseme. Samas ei saa lapse arengust lähtuvalt nõuda, et I kooliastme lõpuks suudab õpilane saavutada teatud matemaatiliste mõistete sisulise arusaamise. Palu ja Kerikmäe (2012) uurimusest selgus, et I

kooliastmes tehtavad vead kanduvad edasi III kooliastmesse. Järelikult tuleb igas järgnevas kooliastmes harjutada ja süvendada eelneva kooliastme teemasid.

Korduvlahendamisel püsis samal tasemel ka üks arutelu ülesanne, mis oli oma raskusastmelt võrreldes teistega keerulisem. Tulemusest võib järeldada, et vanusega ei kaasne iseenesest probleemülesannete lahendamisoskus, vaid on vajalik õpetaja oskuslik suunamine (Bergeson, Fitton, Bylsma, Neitzel & Stine, 2000). Põhikooli riiklik õppekava (2011) rõhutab matemaatikaülesannete lahendamise üldoskuste arendamist ning matemaatikast arusaamist, mitte faktide ja protseduuride tundmist.

Oma õpetamise parandamiseks peaksid õpetajad rohkem tähelepanu pöörama õpilaste teadmiste hindamisele. See võimaldaks õpetajal näha, kus on õpetamisprotsessis tekkinud puudujäägid ning millele peab veel rohkem tähelepanu pöörama. Teades oma klassi õpilaste tugevusi ja nõrkusi, saab õpetaja neid toetada ja aidata ning seeläbi parandada matemaatilist arusaamist.

Enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes

Kolmanda uurimusküsimusena vaadeldi, millised on enamlevinud väärilahendused korduvülesannetes erinevatel ajahetkedel. Selgus, et korduvlahendamisel enamlevinud väärilahendused kas püsisid, kadusid või tulid uut tüüpi väärilahendused juurde.

Enamlevinumaks väärilahenduseks võrdlust sisaldavates tekstülesannetes oli ülesandes olevate arvudega kombineerimine ja seejärel juhusliku tehte sooritamine. Sellise väärilahenduse põhjustab mõistest mitteamusaamine (Geary, 1994). On leitud, et õpilastele, kellel on puudujäägid arusaamises matemaatilistest mõistetest, valmistab raskusi võrdlust sisaldavate tekstülesannete lahendamine (Schumacher & Fuchs, 2012). Antud ülesandes ei mõistetud seose „korda rohkem” tähendust. Ülesande lahendamise muutis keeruliseks ka ülesande struktuur, mis eeldas vastupidise protseduuri läbiviimist. Võib oletada, et antud tüüpi tekstülesandeid lahendatakse algklassides vähe ning õpilastel ei kujune arusaamist antud seosest. Palu ja Liebert (2007) uurisid esimese kooliastme õpikuid ja töövihikuid ning leidsid, et matemaatika õppekirjanduses võrdlusülesandeid seosega *korda rohkem*, mille lahenduseks tuleb jagada, ei esine. Edaspidi võiks uurida, kas õpikud, mis lähtuvad uuest õppekavast, sisaldavad rohkem sellist tüüpi tekstülesandeid.

Tekstülesannete korduvlahendamisel tehti mõningaid sama tüüpi väärilahendusi rohkem. See võib seletatav olla sellega, et õpilased muutuvad vanuse suurenedes enesekindlamaks ning võib oletada ka hooletumaks, võrreldes nooremate õpilastega (Clements, 1980).

Enamlevinud väärilahendused arvukoostise ülesandes olid esimesel ja korduvlahendamisel seotud matemaatilise mõistmisega. Selgus, et esimesel lahendamisel polnud õpilased omandanud täielikult arvu mõistet. Korduvlahendamisel sooritati mõningaid väärilahendusi vähem, kuid arvukoostise mõistmine oli endiselt õpilastele raske. Selline tulemus viitab matemaatika õpiraskuste tekkimisohule, sest arvu koostise mõistmine on omakorda seotud matemaatiliste tehetega (Geary, 2006). Tähelepanu väärivad ka ajaühikute liitmise ülesande väärilahendused. Selgus, et õpilased kasutavad ajaühikute teisendamisel kümnendsüsteemi. Võib oletada, et õpetajad pööravad vähe tähelepanu sellele, et arvutada tuleb kuuekümnendsüsteemis.

Uurimuse piirangud

Kuna antud uurimustöö keskendus matemaatikaalaste teadmiste erinevatele kognitiivsetele tasemetele ning uuris antud tasemeid kirjaliku testiga, siis üheks puuduseks võib olla täpne arutlusoskuse hindamine. Samuti on üheks piiranguks õpilaste vigade analüüsimine ning nendest järelduste tegemine, sest kirjaliku testi vastused ja lahenduskäigud ei võimalda täpselt öelda, mille pärast antud viga tekkis. Edaspidistes uuringutes võiks õpilasi intervjuuerida, et saada teada, kas õpilane sai ülesandest aru või mitte. Samuti võiks intervjuu käigus uurida milliseid strateegiaid õpilased ülesannete puhul kasutavad.

Kokkuvõtteks

Uurimustöö eesmärgiks oli uurida longituudsel I kooliastme õpilaste matemaatikaalaseid teadmisi ja nende arengut. Nii Eesti sisesed kui ka rahvusvahelised uuringud on näidanud, et Eesti õpilased teavad hästi mõisteid ja protseduure, kuid teadmiste rakendamine ning arutlemine on neile rasked (Lepmann, 2010; Tire et al., 2010). Antud uurimustöö jõudis sarnastele tulemustele algklassides. Põhikooli riiklik õppekava on ülesehituselt sidus ning puudujäägid õpilaste teadmistes ja oskustes võivad kanduda iga järgneva aastaga edasi ning süveneda. Selle tõttu tuleks olulist tähelepanu pöörata õpilaste matemaatikaalastele teadmiste erinevatel kognitiivsetel tasemetel, läbi mille saab täpsemat tagasisidet õpilaste tugevustest ja nõrkustest.

Tänuõnad

Täna oma töökaaslasi ja enda lähedasi inimesi, kes olid mulle suureks toeks ja motivatsiooniks andjaks. Samuti tänan kõiki isikuid, kes olid abiks soovitude ja nõuannete eest.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrekselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

Kasutatud kirjandus

- Afanasjev, J., & Palu, A. (2005). Esimese klassi õpilaste teadmised ja edenemine matemaatikas. L. Lepmann, & T. Lepmann (Toim), *Koolimatematika XXXII* (lk 79–86). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Anderson, L. W., & Sosniak, L. A. (1994). Experts from the „Taxonomy of Education Objectives, The Classification of Educational Goals, Handbook I: Cognitive Domain”. L. W. Anderson, & L. A. Sosniak (Eds.), *Bloom's Taxonomy a Forty-year Retrospective* (pp. 9–27). Chicago: The University of Chicago Press.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology*, 96, 4, 699–713.
- Bergeson, T., Fitton, R., Bylsma, P., Neitzel, B., & Stine, M. A. (2000). *Teaching and Learning Mathematics*. Retrieved from <http://www.k12.wa.us/research/pubdocs/pdf/mathbook.pdf>.
- Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of Conceptual Knowledge in Mathematical Procedural Learning. *Developmental Psychology*, 27, 5, 777–786.
- Byrnes, J. P. (1996). Mathematics Learning. In L. Finn (Ed.), *Cognitive Development and Learning in Instructional Contexts* (pp. 155–180). USA: Allyn and Bacon.
- Chamberlin, S. A. (2010). Mathematical Problems That Optimize Learning for Academically Advanced Students in Grades K-6. *Journal of Advanced Academics*, 22, 1, 52–76.
- Clements (Ken), M. A. (1980). Analyzing Children's Errors on Written Mathematical Tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 1, 1–21.
- Cooper, B., & Dunne, M. (2000). *Assessing Children's Mathematical Knowledge*. Buckingham: Open University Press.
- Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic: implications for psychology, neuroscience, and education*. New York: Psychology Press.
- Duncan, G. J., Claessens, A., Huston, A. C., Pagani, L. S., Engel, M., Sexton, H., Dowsett, C. J., Magnuson, K., Klebanov, P., Feinstein, L., Brooks-Gunn, J., Duckworth, K., & Japel, C. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, 43, 6, 1428–1446.
- Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, D., & Agard, P. (1993). Conceptual Knowledge Falls through the Cracks: Complexities of Learning to Teach Mathematics for Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 1, 8–40.

- Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development: Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Geary, D. C. (2006). Development of Mathematical Understanding. In D. Kuhn, R. S. Siegler, W. Damon, & R. M. Lerner (Eds.), *Handbook of child psychology: Vol 2, Cognition, perception, and language (6th ed.)*(777–810). US: John Wiley & Sons Inc.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L., & Bailey, D. H. (2012). Mathematical Cognition Deficits in Children With Learning Disabilities and Persistent Low Achievement: A Five-Year Prospective Study. *Journal of Educational Psychology*, 104, 1, 206–223.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal Summer*, 30, 2, 393–425.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, Understanding, and Skill in Multidigit Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction*, 14, 3, 251–283.
- Lepmann, T. (2010). Rahvusvaheliste võrdlusuuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006 õppetund Eesti matemaatikaõpetajatele. I. Henno (Koost), *Rahvusvaheliste võrdlusuuringute TIMSS 2003 ja PISA 2006 õppetunnid* (lk 77–82). Tallinn: Eduko.
- Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20, 2, 82–88.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes. *Developmental Psychology*, 45, 3, 850–867.
- Kikas, E., Peets, K., Palu, A., & Afanasjev, J. (2009). The role of individual and contextual factors in the development of math skills. *Educational Psychology*, 29, 5, 541–560.
- Kikas, E. (2010). Tunnetusprotsessid ja nende arengulised iseärasused. E. Kikas (Toim). *Õppimine ja õpetamine esimeses ja teises kooliastmes*. Tartu.
- Krathwohl, D. R. (2002). A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory Into Practice*, 41, 4, 212–218.
- Mayer, R. E. (2002). Rote Versus Meaningful Learning. *Theory Into Practice*, 41, 4, 226–232.
- Mullis, V. S. I., Martin, M. O., Ruddock, G. J., O'Sullivan, C. Y., & Preuschoff, C. (2009). *TIMSS 2011 Assessment Framework*. Retrieved from http://timss.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks.pdf.

- Orton, A. (2004). What Cognitive Demands Are Made in Meaning Mathematics? In *Learning Mathematics: Issues, theory and classroom practice* (pp. 13–26). London: Continuum.
- Palu, A., & Liebert, T. (2007). Aritmeetika tekstülesannete liigid esimese kooliastme matemaatika õpikutes ja töövihikutes. E. Abel (Toim), *Koolimatemaatika XXXIV* (lk 43–47). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Palu, A., Afanasjev, J., & Vojevodova, K. (2007). Kolmanda klassi õpilaste matemaatikateadmistest rahvusvahelise uuringu IPMA testide põhjal. E. Abel (Toim), *Koolimatemaatika XXXIV: XXXIV Eesti matemaatikaõpetajate päevad 2007* (lk 35–42). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Palu, A. (2010). *Algklassiõpilaste matemaatikaalased teadmised, nende areng ja sellega seonduvad tegurid*. Tartu: TÜ Kirjastus.
- Palu, A., & Kikas, E. (2010). The types of most widespread errors in solving arithmetic word problems and their persistence in time. In A. Toomela (Ed.), *Systemic Person-Oriented Study of Child Development in Early Primary School* (pp.155–172). Frankfurt am Main: Peter Lang Verlag.
- Palu, A., & Kerikmäe, I. (2012). Teises kooliastmes saavutatud matemaatikapädevus ja õpetajate arvamused pädevuse parandamise võimalustest. L. Lepmann, T. Lepmann, & K. Kokk (Toim), *Koolimatemaatika XXXIX* (lk 59–66). Tartu: Tartu Ülikooli Kirjastus.
- Põhikooli riiklik õppekava*. Lisa 3 (2011). Külastatud aadressil https://www.riigiteataja.ee/aktiis/1200/9201/1009/VV1_lisa3.pdf#.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Eds.), *The development of Mathematical Skills* (pp. 75–110). Psychology Press.
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics: Does One Lead to the Other? *Journal of Educational Psychology*, 91, 1, 175–189.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skill in Mathematics: An Iterative Process. *Journal of Educational Psychology*, 93, 2, 346–362.
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The Developmental Relations Between Conceptual and Procedural Knowledge: A Multimethod Approach. *Developmental Psychology*, 46, 1, 178–192.

- Schumacher, R. F., & Fuchs, L. S. (2012). Does understanding relational terminology mediate effects of intervention on compare word problems? *Journal of Experimental Child Psychology*, 111, 4, 607–628.
- Stodolsky, S. S., Salk, S., & Glaessner, B. (1991). Student Views About Learning Math and Social Studies. *American Educational Research Journal*, 28, 1, 89–116.
- Svjatskaja, R. (2011). *Esimese ja teise klassi õpilaste matemaatikateadmised ja sellega seonduvad tegurid*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Zevenbergen, R., Dole, S., & Wrigt, R. J. (2004). *Teaching Mathematics in Primary School*. Crows Nest, NSW, Australia: Allen & Unwin.
- Tammiksaare, K. (2010). *Teise klassi õpilaste matemaatikaalased teadmised ja sagedamini esinenud vead ülesannete lahendamisel*. Publitseerimata magistritöö. Tartu Ülikool.
- Tasemetööde ning põhikooli ja gümnaasiumi lõpueksamite ettevalmistamise, koostamise, läbiviimise ja hindamise tingimused ja kord ning tasemetööde, ühtsete põhikooli lõpueksamite ja riigieksamite tulemuste analüüsimise tingimused ja kord* (2010). Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/123022012015>.
- Tire, G., Puksand, H., Henno, I., & Lepmann, T. (2010). *PISA 2009-Eesti tulemused. Eesti 15-aastaste õpilaste teadmised ja oskused funktsionaalses lugemises, matemaatikas ja loodusteadustes*. Külastatud aadressil http://www.ekk.edu.ee/vvfiles/0/PISA_2009_Eesti.pdf.
- Üleriigiliste tasemetööde tulemused* (2012). Külastatud aadressil <http://www.ekk.edu.ee/120478>.
3. klassi matemaatika tasemetööst (s.a.). Külastatud aadressil <http://www.innove.ee/UserFiles/Tasemet%C3%B6%C3%B6d/TT3Kodulehele1.pdf>.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina KATRIN METSA

(sünnikuupäev: 15.10.1988)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
MATEMAATIKAALASED TEADMISED JA NENDE ARENG I KOOLIASTMES,

mille juhendaja on ANU PALU,

- 1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
- 1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 20.05.2013